Minule: relace na X je $R \subseteq X \times X$.

Píšeme aRb místo $(a,b) \in R$.

- reflexivní: $\forall x \in X : xRx$
- symetrická: $\forall x,y \in X : xRy \to yRx$
- tranz.: $\forall x,y,z \in X : xRy \wedge yRz \to xRz$
- (slabě) antisymetrická: $\forall x,y \in X : xRy \wedge yRx \to y = x$

$\Uparrow$

- silně antisymetrická $\Rightarrow$ není reflex.

  $\forall x,y \in X : xRy \longrightarrow \neg yRx$

- R je ekvivalence:

reflexivní & symetrická & tranzitivní

Příklady:

- rovnost je ekvivalence na lib. množině.

$\left[x = x \checkmark \quad x = y \Rightarrow y = x \checkmark \quad x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z \checkmark \right]$

- $X = \{ T \subseteq \mathbb{R}^2 : T$ je trojúhelník$\}$

  $T \cong S \overset{def.}{\iff}$ shodné

  $T \sim S \overset{def.}{\iff}$ podobné

- $X = \{$účastníci dnešní přednášky$\}$

  $A \sim B \overset{def.}{\iff} A$ se narodil/a ve stejný den týdne B.

- $X = \{1,2,3,4,5\}$

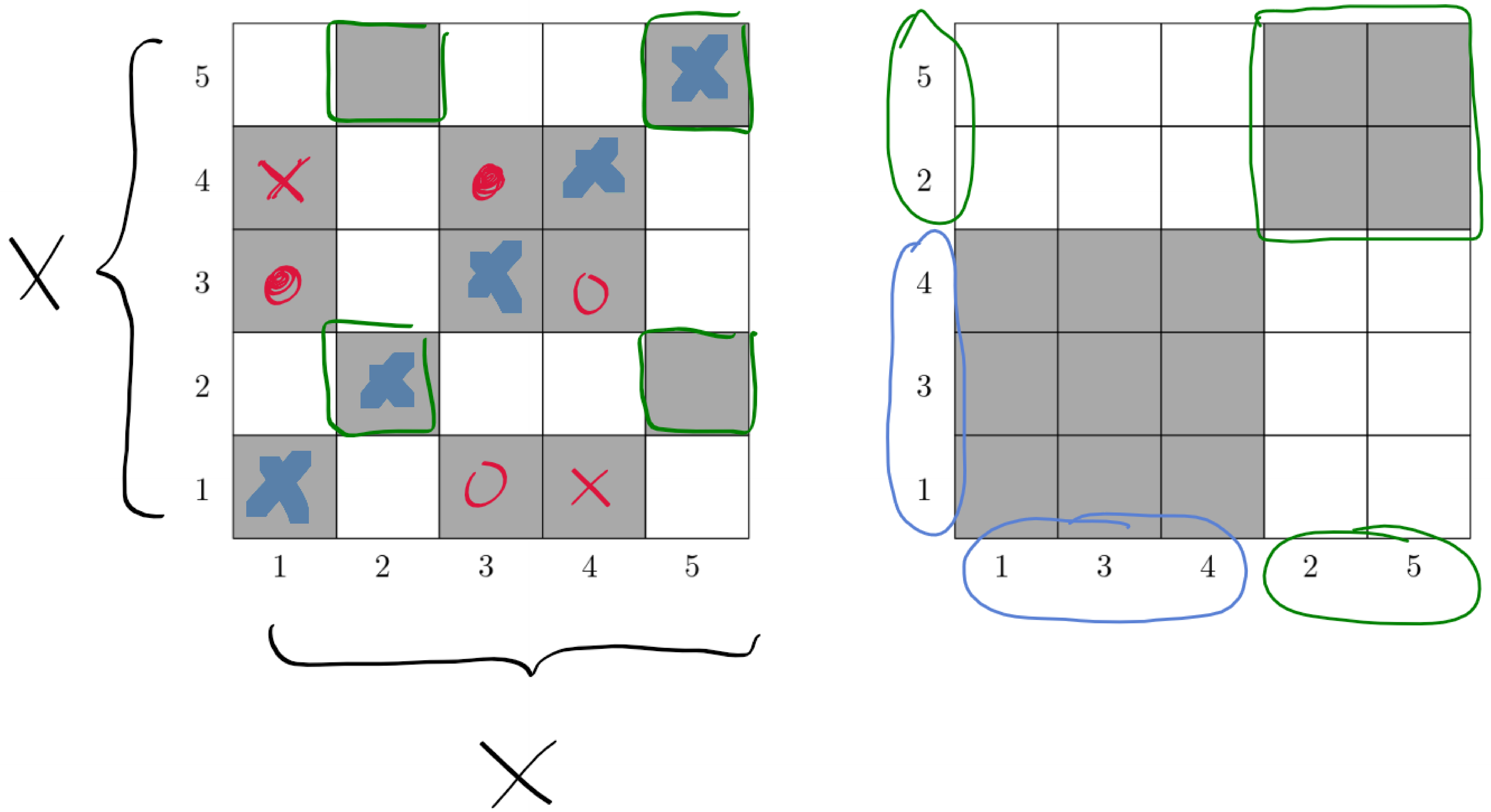
$$E \subseteq X \times X = X^2$$

$$E = \{\overbrace{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5)}^{\text{refl.}},$$

$$\left.\begin{matrix}(1,3), & (1,4), & (2,5), \\ (3,1), & (4,1), & (5,2),\end{matrix}\right\}\ \text{SYM.}$$

TRANZ.

$$\underbrace{(4,3),\ (3,4)}_{\text{SYM.}}\ \}.$$



Buď R relace na množině X.

$$R \subseteq X^2.$$

- $\mathrm{dom}(R) = \{x \in X : \exists y \in X : xRy\}$

„domain" = def. obor

- $\mathrm{rng}(R) = \{y \in X : \exists x \in X : xRy\}$

„range" = obor hodnot

- $R^{-1} = \{(y,x) \in X^2 : (x,y) \in R\}$
- $R \restriction Y = \{(x,y) \in X^2 : (x,y) \in R \wedge x \in Y\}$

omezujeme definiční obor.

- $R \circ S = \{(u,w) : \exists v : (u,v) \in R \wedge (v,w) \in S\}$

Pořadí je zde opačné než jsme zvyklí u zobrazení.

Buď E ekviv. na X, $x \in X$.

Definujeme $[x]_E = \{y \in X : xEy\}$

$$X/E = \{[x]_E : x \in X\}.$$

↳ tvoří disjunktní rozklad X

tj. $\bigcup_{x \in X} [x]_E = X \wedge \left((\neg xEy) \rightarrow [x]_E \cap [y]_E = \emptyset\right)$

Příklad: $X = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

definujeme relaci E na $\mathbb{Z}$:

$$k \, E \, l \overset{def.}{\iff} k \equiv l \pmod{n}$$

- pro $n = 2$:

$$\{[k]_E : k \in \mathbb{Z}\} = \{\{k \in \mathbb{Z} : k \text{ sudé}\}, \{k \in \mathbb{Z} : k \text{ liché}\}\}.$$

- pro obecné $n \in \mathbb{N}$

máme n rozkladových tříd

$\{0, n, -n, 2n, -2n, \dots\}$

$\{1, 1+n, 1-n, 1+2n, 1-2n, \dots\}$

$\vdots$

$\{n-1, n-1+n, n-1-n, n-1+2n, n-1-2n, \dots\}$.

---

doc. David Stanovský

(stránka úloh z A. na webu)

(„Základy algebry")

Relace uspořádání

Relace R na A (tj. $R \subseteq A^2$) je (neostré, částečné) uspořádání na A, jestliže platí:

- R je reflexivní
- R je slabě antisym.
- R je tranzitivní.

R je (ostré, částečné) uspořádání na A, pokud

- R je silně antisym. ($\Rightarrow$ antireflexivita)
- R je tranzitivní.

Uspořádání (ostré / neostré) je lineární jestliže

$$\forall x, y \in A : xRy \lor yRx \lor y = x.$$

vlastnost trichotomie (relace je trichotomická).

Značení: Obvykle pomocí

$\leq$ resp $<$ nebo

$\preccurlyeq$ resp $\prec$.

Definice: Nechť $(A, \leq)$ je ČUM. $X \subseteq A$, $a \in A$. Prvek a se nazývá:

- minoranta (dolní závora) X, pokud $\forall x \in X: a \leq x$.
- nejmenší prvek (minimum) X, pokud (je a minoranta X) $\wedge$ $a \in X$.
- minimální prvek, pokud $a \in X \wedge (\forall x \in X \setminus \{a\})\ x \nleq a$

$\neg(x \leq a)$

- infimum X pokud a je největší minoranta X. (nemusí být prvkem X)

Analogicky definujeme:

- majoranta
- největší prvek (maximum)
- maximální prvek
- supremum (nejmenší maj.)

Připomeň: $\inf [0,1] = 0$

dokonce $\min [0,1] = 0$ $(0 \in [0,1])$

- $\inf (0,1) = 0$, ale $(0,1)$ nemá min.
- $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sup \text{ — '' — } = 1 \\ \max = 1 \end{array}\right]$$

min nemá.

- $(A, \leq)$ je <u>dobré</u> pokud

$\forall X \subseteq A : X \neq \emptyset \longrightarrow$ X má nejmenší prvek

Zkratka za:

$\exists a \in X$: a je nejmenší prvek X

Zkratka za:

$a \in X \wedge \forall x \in X : a \leq x$

Zkratka za $(a, x) \in \leq$.

<u>Příklad</u>: • $(\mathbb{R}, \leq)$ není dobré

[<u>Dk</u>: Třeba $(0,1)$ nemá min.]

• $[-273{,}15, \infty)$ není dobře usp. množina.

[Dk. $(0,1)$ nemá min.]

• libovolná konečná lineárně uspořádaná množina

• $(\mathbb{N}, \leq)$ je dobře usp. mn.

každá ne pr. podmnožina má min.

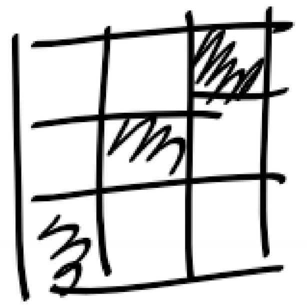
[Snadné Cv.]

• $(\mathbb{Z}, \leq)$ není dobře usp.

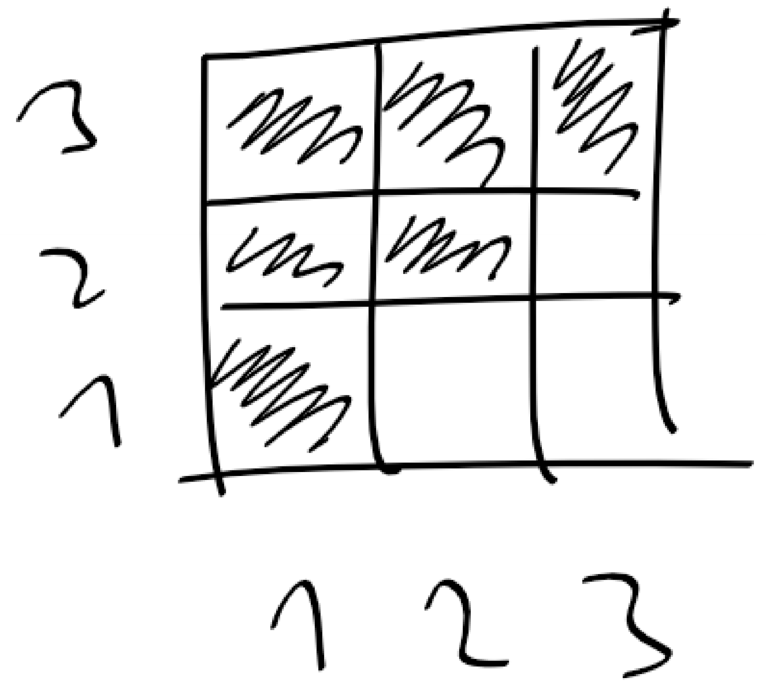
Příklad: $A = \{1,2,3\}$

• $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

neostré usp., není lin.

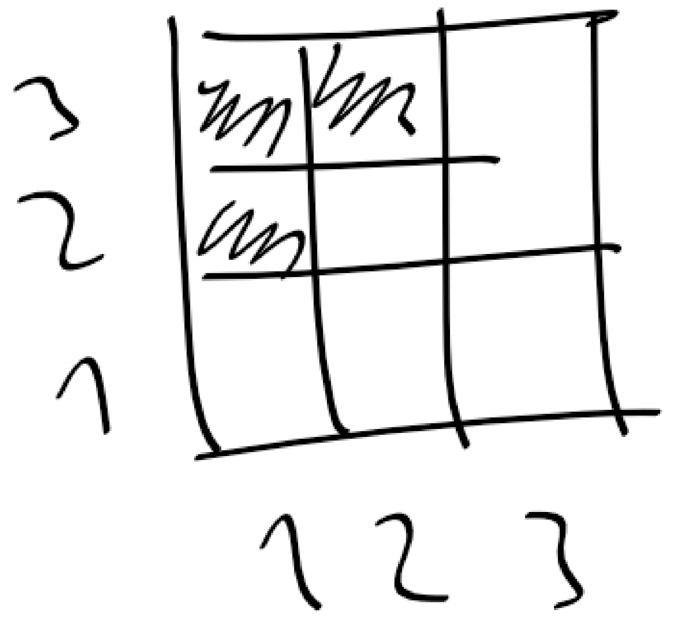


• $\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$



• $R_2 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

$R_2 = < \restriction_{\{1,2,3\}}$



Příklad: • Buď x libovolná mn.

Značme $P(x) = \{u : u \subseteq x\}$

(Potence x je množina všech podmn. x)

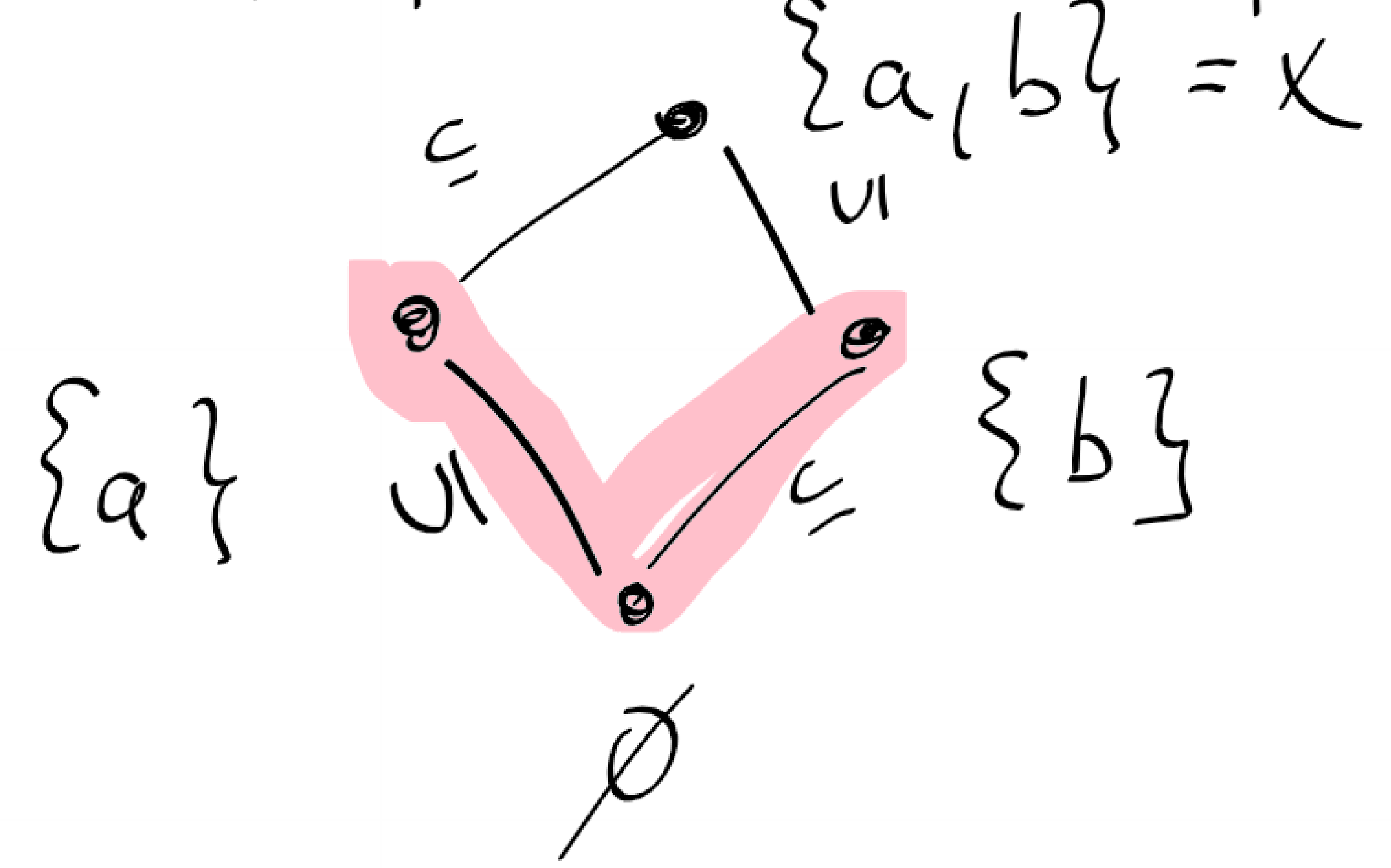
Uvažujme libovolné x a $P(x)$.

Tvrdím, že relace $\subseteq$ je ČU na $P(x)$. Tj. $(P(x), \subseteq)$ je ČUM.

- reflex. $a \subseteq a$ ✓
- $a \subseteq b \wedge b \subseteq a \longrightarrow a = b$ ✓
- $a \subseteq b \wedge b \subseteq c \longrightarrow a \subseteq c$ ✓

$x = \{a, b\}$, $a \neq b$

$P(x) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ „singleton"



Uvažujme $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\} = A$

A nemá max,

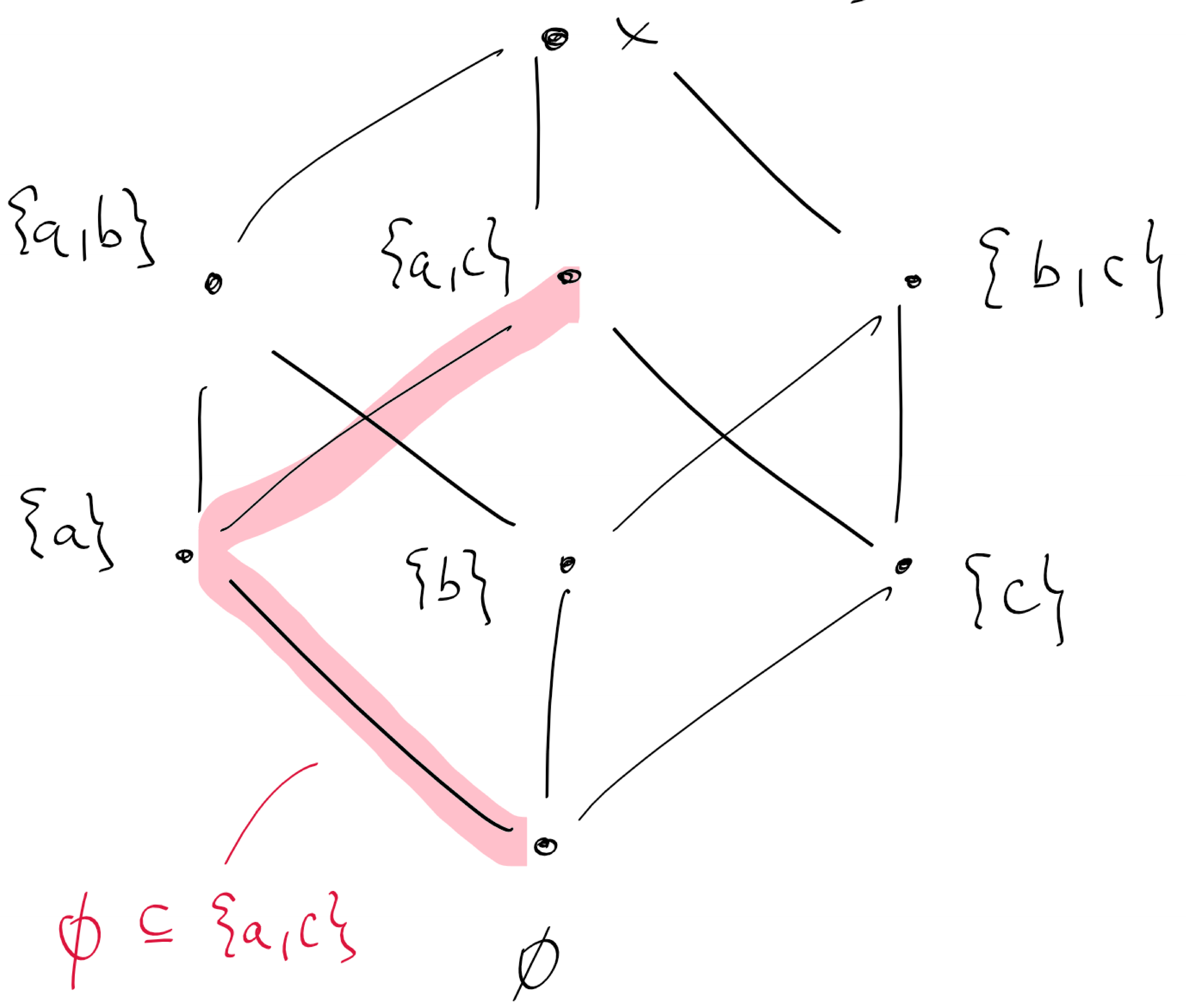
$\min A = \emptyset$

$\{a\}, \{b\}$ jsou max. prvky

$\{a, b\}$ je h. z. A, zároveň sup.

∘ $X = \{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$



Cw.: $A \subseteq (\mathcal{P}(X), \subseteq)$

$\sup A = ?$

$\inf A = ?$